TP 8 - Un peu d'analyse

Pour commencez, ouvrez le fichier `Resultats_elementaires_analyse.lean` *(disponible sur Arche), et copiez-collez son contenu au début de votre console* LEAN.

Ce fichier contient des énoncés élémentaires qui nous serviront dans la suite de ce TP ; nous en parlerons le moment venu.

1 Limites en LEAN

On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ainsi que deux nombres réels $a, l \in \mathbb{R}$.

1. Rappelez comment on peut écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Dans votre formule, vous avez normalement dû écrire des symboles « $<$ » ou « $\leq$ ». Combien y-a-t-il de formules équivalentes possibles, si l'on s'autorise à échanger inégalités larges et inégalités strictes ?

Dans la suite, on utilisera la définition suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta \to |f(x) - l| \leq \epsilon. \qquad (\clubsuit)$$

2. Tapez maintenant en LEAN un prédicat `limite`, portant sur une fonction `f : Real→Real`, et deux réels `a l`, et affirmant que `f` tend vers `l` en `a`. Ici, utilisez la définition ($\clubsuit$).

Comme vous aurez l'occasion de vous en rendre compte dans la suite, pour LEAN, les deux expressions suivantes sont synonymes :

```
∀ϵ >0, P(ϵ)
```

et

```
∀ϵ : Real,  ϵ > 0 → P(ϵ)
```

On va maintenant voir un premier exemple de preuve de convergence en revenant à la définition.

3. Définissez une fonction LEAN `fonction_exemple`, correspondant à la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x + 3. \end{array}$$

4. a. Tapez l'énoncé du théorème `exemple_convergence`, affirmant que la fonction précédente tend vers 7 au point 2.

b. Réfléchissez deux minutes au brouillon à la manière dont vous feriez pour démontrer le résultat au papier.

c. Commencez maintenant à taper la preuve en LEAN, en suivant l'aide-mémoire. Faites en sorte que le prédicat `limite` soit réécrit dans les hypothèses et l'objectif, et **arrêtez-vous** au moment où l'objectif commence par : »$\exists \eta > 0$ ».

d. Tapez « `use sorry` » : nous indiquerons plus tard à l'ordinateur quelle valeur de η il faut prendre. Poursuivez normalement la preuve en suivant l'aide-mémoire ; on complètera les passages manquants plus tard.
e. Vous devez maintenant arriver à un état où l'on doit montrer que

$$|2x + 3 - 7| \leq \epsilon, \tag{1}$$

sous l'hypothèse que $x \in \mathbb{R}$ satisfait $|x - 2| \leq \eta$.
(dans la machine, il est écrit `sorry` à la place de η) Faites le calcul au papier : quelle valeur de $\eta > 0$ garantit que l'inégalité ci-dessus est satsfaite ?

f. Remplacez le « `sorry` » par l'expression que vous avez trouvée, et complétez les trous dans la preuve.

A la fin de la preuve, justifiez donc l'inégalité (1) par un bloc `calc` : pour les différentes lignes, vous pourrez utiliser les tactiques suivantes :

— `ring` et `linarith` (que vous connaissez déjà) ;

— `field_simp` : simplifie une expression faisant intervenir des divisions.

Si vous avez besoin de justifier que $|ab| = |a||b|$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, vous pourrez taper « `apply abs_mul` » : c'est l'une de résultats introduits dans le code que vous aviez copié-collé plus tôt.

Normalement, l'ordinateur vous demandera aussi de justifier que $\eta > 0$. Si vous ne vous êtes pas trompé dans l'expression, il suffira d'utiliser la tactique `field_simp`.

5. Relisez votre code, et essayez d'écrire une preuve juste et concise de l'affirmation précédente.

2 Somme de limites. Utilisation de l'inégalité triangulaire

Après cet échauffement, on va maintenant montrer que « la somme de deux limites est la limite de la somme ». Plus rigoureusement, on va montrer que pour toutes fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour tous nombres $a, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, si $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$, alors

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l_1 + l_2.$$

6. Ecrivez l'énoncé d'un théorème `somme_limite`, affirmant le résultat ci-dessus.

7. Réfléchissez une ou deux minutes pour vous remémorer la manière dont on démontre ce résultat.

8. Commencez maintenant à taper la preuve, en suivant la même démarche qu'à la question **4** : après avoir réécrit toutes les occurences de « `limite` » dans l'objectif et les hypothèses, tapez « `use sorry` » lorsque l'objectif commence par « $\exists \eta$ >0 ».
Ensuite, continuez la preuve jusqu'à atteindre le moment où l'on doit écrire un bloc « `calc` ».

9. Quelle expression convient pour la valeur de η ?

Pour introduire cette expression, vous aurez besoin d'appliquer les hypothèses suivant lesquelles $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, à des valeurs adéquates de ϵ.

Une fois cela fait, remplacez donc `sorry` par l'expression requise.

(Indication : pour appliquer les hypothèses sur les deux limites, vous aurez besoin de justifier que $\frac{\epsilon}{2} > 0$, sous l'hypothèse que $\epsilon > 0$.
Pour cela, vous pouvez taper :

```
have Hpos : ϵ/2 > 0
    := by field_simp
```

Cela introduira l'hypothèse `Hpos`, qui affirme que `ϵ/2 > 0`, du moment que vous avez introduit un nombre $\epsilon \in \mathbb{R}$ strictement positif.)

Normalement, vous devez tapé avoir un bloc « `apply And.intro` », dans lequel il reste deux parties à compléter : l'une demandant de justifier que la valeur donnée de η est strictement positive, et l'autre demandant de finir le bloc `calc`.

10. Pour continuer la preuve, l'ordinateur vous demandera de justifier que votre valeur de η est strictement positive. Complétez cette partie du code.

Pour cela, vous pouvez utiliser le théorème `min_pos` que vous avez copié-collé plus tôt. On peut l'employer de la façon suivante : si `a, b` sont des nombres réels, et si `H1` (resp. `H2`) est une proposition qui affirme que `a > 0` (resp. que `b > 0`), alors `min_pos H1 H2` renvoie la proposition qui affirme que

`min a b > 0.`

11. Terminez enfin d'écrire le bloc `calc`. Pour cela :

— vous pouvez introduire juste avant le bloc `calc` les inégalités qui vous paraîtront pertinentes (par exemple : `|f x - a|` $\leq$ `ϵ/2`...). Dans les différentes lignes du bloc `calc`, vous pourrez ainsi utiliser la justification

`by linarith [Hypothese1, ...],`

qui essaie d'utiliser les hypothèses entre crochets pour justifier une (in)égalité ;

— vous pouvez utiliser le théorème `inferieur_min` (introduit plus tôt), de la façon suivante : si `a`, `b` et `x` sont des nombres réels, et si `Hx` est une proposition affirmant que `x` $\leq$ `min a b`, alors

`inferieur_min Hx`

est la proposition

`(x ≤ a) ∧ (x ≤ b).`

— vous pouvez enfin utiliser l'inégalité triangulaire, avec la syntaxe suivante :

`|a + b| ≤ |a| + |b| := by apply ineg_triang`

(évidemment, il faut remplacer `a` et `b` par les expressions adéquates ! Le théorème `ineg_triang` a aussi été introduit dans le code que vous avez copié-collé).

12. Relisez la preuve sur ordinateur, et inspirez vous en pour écrire une preuve correcte et concise de l'énoncé démontré.

3 Limites et fonctions localement bornées

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *localement bornée* au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ s'il existe des constantes $C > 0$ et $\eta > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq C.$$

13. Donnez un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne soit pas localement bornée au voisinage de 0.

14. Ecrivez en LEAN un prédicat `localement_bornee`, prenant en entrée une fonction `f : Real→Real` et un nombre réel `a`, et affirmant que `f` est localement bornée au voisinage de `a`.

15. Utilisez LEAN pour démontrer le théorème suivant :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction admettant une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathbb{R}$, alors f est localement bornée au voisinage de a.

Cette question sera moins guidée que les précédentes : commencez à réfléchir à la manière dont on démontrerait le résultat sur papier. Ensuite, écrivez l'énoncé du théorème pertinent, et essayez de suivre la démarche précédente pour le démontrer.

A un moment, vous aurez peut-être besoin de justifier que si $l \in \mathbb{R}$, alors $|l| \geq 0$. Vous pouvez pour cela utiliser le théorème `abs_positive`*, que vous avez copié-collé.*

16. Rédigez ensuite une preuve rigoureuse et concise de l'énoncé, en vous aidant des différentes étapes faites sur machine.

17.* Montrer en LEAN que si $a \in \mathbb{R}$ et si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, telles que f est localement bornée au voisinage de a et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors on a $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

18. Écrire l'énoncé d'un théorème `produit_limite`, correspondant à l'énoncé informel « *la limite d'un produit est le produit des limites* ».

19. Écrire une preuve de cet énoncé sur papier. Si vous en avez le temps et le courage, vous pouvez essayer d'écrire la preuve sur ordinateur.

4 Continuité

20. Écrire un prédicat portant sur une fonction `f : Real →Real`, et affirmant que la fonction `f` est continue.

21. En utilisant LEAN, montrer qu'un produit de fonctions continues est continue.

22. Utiliser LEAN pour montrer que les fonctions constantes $x \in \mathbb{R} \mapsto a$ (où $a \in \mathbb{R}$) et identité $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ sont continues.

23. En utilisant LEAN, montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$$

est continue.